Corrigé type de l'examen de rattrapage électromagnétisme (2ème année physique 2024)

Exercice 1:

1. En appliquant le théorème d'Ampère :

$$\begin{cases} \vec{B} = B\vec{e}_x \quad pour\ z > 0 \\ \vec{B} = -B\vec{e}_x\ pour\ z < 0 \end{cases}$$

1

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I$$

$$\int_{1\to2}\vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_{2\to3}\vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_{3\to4}\vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_{4\to1}\vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I$$

$$\int_{1\to2}(B\vec{e}_x)\cdot(dx\vec{e}_x) + \int_{2\to3}(B\vec{e}_x)\cdot(-dz\vec{e}_z) + \int_{3\to4}(-B\vec{e}_x)\cdot(-dx\vec{e}_x) + \int_{4\to1}(B\vec{e}_x)\cdot(dz\vec{e}_z) = \mu_0 I$$

$$B(a) + 0 + B(a) + 0 = \mu_0 I \Rightarrow 2Ba = \mu_0 I$$

1

Où

$$I = \int \vec{J}\cdot\vec{ds} = \int (K\vec{e}_y)\cdot(dx\vec{e}_y) = K\int_{-a/2}^{a/2} dx = K(a)$$

1

0.5

$$B = \frac{\mu_0 K}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2}\vec{e}_x \quad pour\ z > 0 \\ \vec{B} = -\frac{\mu_0 K}{2}\vec{e}_x\ pour\ z < 0 \end{cases}$$

0.5

2. le potentiel magnétique vectoriel $\vec{A}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

puisque $\vec{B}$ possède une seule composante :

$$\vec{B} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x$$

0.5

Comme $\vec{A}$ est indépendant de x et y :

$$B = -\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

1

Pour $z > 0$:

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0 K}{2} \Rightarrow A_y = \frac{\mu_0 K}{2}z$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 K}{2}z\vec{e}_y$$

1

$$\begin{cases} \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{2}z\vec{e}_y \quad pour\ z > 0 \\ \vec{A} = -\frac{\mu_0 K}{2}z\vec{e}_y\ pour\ z < 0 \end{cases}$$

0.5

Exercice 2

1.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$ 0.5

et $\vec{\nabla}\wedge\vec{v} = -cy\vec{e}_x + cx\vec{e}_y$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -cy & cx & 0 \end{vmatrix} = 2c\vec{e}_z$$ 0.5

2. En régime stationnaire on a : $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}_c$ et $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0}$. 2

D'après ces relations on voit bien que $\vec{v}$ ne peut pas représenter un champ électrique $\vec{E}$ car $\vec{\nabla}\wedge\vec{v} \neq \vec{0}$ ne vérifie pas $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0}$. Par contre $\vec{v}$ peut représenter un champ magnétique $\vec{B}$ car $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ vérifie $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ et $\vec{\nabla}\wedge\vec{v} = 2c\vec{e}_z$ vérifie $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}_c$ avec $\vec{J}_c = \frac{2c}{\mu_0}\vec{e}_z$.

3. $V = a_0 x$ et $\vec{A} = b_0 z\boldsymbol{sin}(\omega t)\vec{e}_y$
   a. $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -a_0\vec{e}_x - b_0 z\omega\boldsymbol{sin}(\omega t)\vec{e}_y$ 1
   b. $B = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & b_0 z\boldsymbol{sin}(\omega t) & 0 \end{vmatrix} = -b_0\boldsymbol{sin}(\omega t)\vec{e}_x$ 1

Exercice 3

1. L'onde est polarisée suivant l'axe $\overrightarrow{Ox}$, et se propage dans la direction $\overrightarrow{Oz}$ avec une vitesse de la lumière $C = 3\times10^8 m/s$, la nature : l'onde est transversale .. 1
2. La relation de dispersion $\omega(k)$ de l'onde.

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$ 0.5

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \cdots(1)$$

0.5

Où

$$E_x = E_m\,cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \cdots(2)$$ 0.5

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_m\cos(\omega t - kz) & 0 & 0 \end{vmatrix} = kE_m\sin(\omega t - kz)\,\vec{e}_y$$ 0.5

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & kE_m \, sin(\omega t - kz) & 0 \end{vmatrix} = k^2 E_m \, cos(\omega t - kz)\, \vec{e}_x \cdots (3)$$

0.5

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_m \, cos(\omega t - kz)\vec{e}_x \cdots (4)$$

0.5

Substituant les équations (2),(3) et (4) dans l'équation (1) :

$$-k^2 E_m \, cos(\omega t - kz)\, \vec{e}_x + \frac{1}{C^2}\omega^2 E_m \, cos(\omega t - kz)\vec{e}_x = \vec{0}$$

$$\frac{1}{C^2}\omega^2 = k^2 \Rightarrow \omega = kc$$

0.5

3.

0.25

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad et \;\; \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi C}{\omega}$$

0.25

4. Le champ magnétique $\vec{B}$ et le vecteur de Poynting $\vec{R}$ de l'onde.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = kE_m \sin(\omega t - kz)\, \vec{e}_y \Rightarrow \vec{B} = \frac{k}{\omega} E_m \, cos(\omega t - kz)\, \vec{e}_y$$

0.5

$$\vec{B} = \frac{E_m}{C} cos(\omega t - kz)\, \vec{e}_y$$

0.5

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathrm{E}} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_m \cos(\omega t - kz) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{E_m}{C} cos(\omega t - kz) & 0 \end{vmatrix} = \frac{E_m^2}{\mu_0 C} cos^2(\omega t - kz)\, \vec{e}_z$$

0.5

5. la puissance rayonnée $P(t)$

Le vecteur de Poynting correspond à la puissance rayonnée par l'onde par unité de temps et unité de surface.

$$P(t) = \iint_{(S)} \vec{R} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Où

$$\overrightarrow{ds} = dS\vec{n} = \frac{dS}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$$

$$P(t) = \iint_{(S)} \left(\frac{E_m^2}{\mu_0 C} cos^2(\omega t - kz)\, \vec{e}_z\right) \cdot \left(\frac{dS}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)\right) = \iint_{(S)} \frac{E_m^2}{\sqrt{2}\mu_0 C} cos^2(\omega t - kz)\, dS$$

$$P(t) = \frac{SE_m^2}{\sqrt{2}\mu_0 C} cos^2(\omega t - kz)$$

1

La valeur moyenne de la puissance rayonnée $\langle P \rangle$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{SE_m^2}{\sqrt{2}\mu_0 C}\frac{1}{T}\int_0^T cos^2(\omega t - kz)dt = \frac{SE_m^2}{2\sqrt{2}\mu_0 C}$$

0.5